UNA GENERALIZACION DE LA MIGRATIVIDAD

Humberto Bustince[1] **Javier Fernandez**[1] **Bernard De Baets**[2] **Javier Montero**[3] **Radko Mesiar**[4]

[1] Dep. Automática y Computación, Universidad Pública de Navarra,{bustince, fcojavier.fernandez}@unavarra.es
[2] Dep. of Applied Mathematics, Biometrics and Process Control, Ghent University, bernard.debaets@ugent.be
[3] Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, monty@mat.ucm.es
[4] Dep. of Mathematics and Descriptive Geometry, Slovak University of Technology, mesiar@math.sk

Resumen

En este trabajo presentamos una generalización de los conceptos de función α-migrativa y función migrativa. En particular, nos centramos en la relación de estas funciones migrativas generalizadas con algunas propiedades habitualmente requeridas a funciones de agregación, como puede ser la existencia de elemento neutro.

Palabras Clave: Migratividad; α-migratividad; Función de agregación.

1 INTRODUCCION

La propiedad migrativa expresa el hecho de que si reducimos en una determinada proporción (dada por un parámetro α) una de las variables de una función de agregación (de al menos dos variables), el resultado es independiente de cuál de las variables es la reducida. Desde el punto de visto aplicado, esta propiedad es muy interesante siempre que es necesario agregar informaciones parciales procedentes con diferentes orígenes temporales y/o espaciales. Este es el caso, por ejemplo en toma de decisiones ([7, 8, 9]. También en procesamiento de imagen resulta útil, pues permite expresar el hecho de que una determinada propiedad (i.e., el solapamiento) es independiente de si se varía una o utra parte de la imagen de una misma forma (por ejemplo, el solapamiento es el mismo si se reduce en una proporción dada la intensidad del fondo y no la del objeto o si es la intensidad del objeto y no de la del fondo la que se reduce en esa misma proporción).

Desde un punto de vista teórico, la migratividad fue introducida por Durante y Sarkoci ([5], y ver también [6]) para valores fijos del parámetro α, esto es, lo que en este trabajo vamos a denominar α-migratividad. Posteriormente, en [3] los autores realizan un completo estudio de la llamada migratividad generalizada, es decir, la propiedad migrativa cuando el parámetro puede tomar cualquier valor $\alpha \in [0, 1]$. Por otro lado, tambin se ha considerado la propiedad migrativa para ejemplos específicos de funciones de agregación ([2]).

En este trabajo vamos un paso más allá y presentamos los conceptos de α-B-migratividad y B-migratividad. Es decir, consideramos funciones invariantes en cierto sentido frente a reducciones en una u otra variable, pero donde la reducción o escalamiento no viene dado exclusivamente por un parámetro α, sino también por una función de agregación B. En particular, esta generalización engloba la α-migratividad y la migratividad generalizada sin más que tomar como función B el producto.

El esquema de este trabajo es el siguiente. En la próxima sección presentamos algunos conceptos básicos para este trabajo. En la Sección 3 presentamos algunos resultados sobre funciones α-B-migrativas, centrándonos en particular en las consecuencias de la existencia de elemento neutro. La Sección 4 está dedicada al estudio de algunos resultados sobre funciones B-migrativas. En la Sección 5 mostramos algunos resultados cuando consideramos casos específicos de funciones de agregación, como las t-normas o las medias cuasiaritméticas. Finalmente, en la Sección 6 mostramos algunas conclusiones y líneas de trabajo futuras.

2 PRELIMINARES

En esta sección introducimos algunos conceptos preliminares sobre funciones migrativas. Nos vamos a reducir al caso de funciones de agregación ([1]), aunque la migratividad tiene sentido también para funciones más generales. Empezamos recordando las definición de α-migratividad y migratividad.

Definición 1. Sea $M : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ una función de agregación.

(i) Sea $\alpha \in [0,1]$. M es α-migrativa si para cualesquiera $x, y \in [0,1]$ se tiene la identidad $M(\alpha x, y) = M(x, \alpha y)$.

(ii) M es migrativa en sentido generalizado (o simplemente migrativa) si para cualesquiera $x, y, \alpha \in [0,1]$ se tiene que $M(\alpha x, y) = M(x, \alpha y)$.

Las funciones migrativas han sido estudiadas con detalle en [3], donde en particular puede hallarse el siguiente resultado.

Teorema 1. Una función de agregación $M : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ es migrativa si y solamente si existe una función $g : [0,1] \to [0,1]$ no decreciente y con $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$ de modo que

$$M(x,y) = g(xy) \text{ para todo } x, y \in [0,1] \,. \tag{1}$$

Los conceptos de α-migratividad y migratividad pueden generalizarse como sigue.

Definición 2. Sean $\alpha \in [0,1]$ y $B : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ una función de agregación. Una función de agregación $M : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ se dice que es α-B-migrativa si para cualesquiera $x, y \in [0,1]$ se tiene que

$$M(B(x,\alpha), y) = M(x, B(\alpha, y)) \,. \tag{2}$$

Ejemplo. Sea la función de agregación

$$B(x,y) = \frac{xy}{1 + 2xy - x - y}$$

para $(x,y) \in [0,1]^2 - \{(0,1),(1,0)\}$. Definamos también $B(0,1) = B(1,0) = 0$. Entonces la función $M(x,y) = \min(x,y)$ es $1/2$-B-migrativa.

Es importante hacer notar que, en la definición de α-B-migratividad no se impone ninguna clase de simetría sobre B. Por tanto, es importante mantener α como "elemento central" en la α-B-migratividad.

Definición 3. Sea $B : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ una función de agregación. Una función de agregación $M : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ se dice B-migrativa si es α-B-migrativa para todo $\alpha \in [0,1]$; es decir, si la identidad

$$M(B(x,\alpha), y) = M(x, B(\alpha, y)) \tag{3}$$

se verifica para cualesquiera $x, y, \alpha \in [0,1]$.

Ejemplo. Si definimos $M(x,y) = 0$ si $xy = 0$ y $M(x,y) = 1$ en cualquier otro caso, entonces M es una función de agregación B-migrativa tomando B tal que $B(x,y) = 0$ si $xy = 0$ y $B(x,y) = x$ en cualquier otro caso. De hecho, M es una función de agregación B-migrativa para cualquier función de agregación B tal que $B(x,y) = 0$ si y solo si $xy = 0$.

Claramente, una función de agregación A es asociativa si y solamente si A es A-migrativa. En este sentido, también cabe entender la B-migratividad como una posible extensión del concepto de asociatividad.

Por otro lado, cabe destacar que la α-migratividad y la migratividad pueden recuperarse de la α-B-migratividad y la B-migratividad, respectivamente, sin más que tomar como función de agregación el producto $B(x,y) = xy$.

3 ALGUNOS RESULTADOS SOBRE FUNCIONES α-B-MIGRATIVAS

Comenzamos estudiando algunas propiedades de las funciones α-B-migrativas. A lo largo de toda esta seccin consideramos un valor $\alpha \in [0,1]$ fijado.

Proposición 1. Sean B una función de agregación y M una función de agregación α-B-migrativa. Entonces M es constante sobre $[0, B(0,\alpha)] \times [B(\alpha,1), 1]$.

Demostración. Es suficiente observar que

$$M(B(0,\alpha), 1) = M(0, B(\alpha, 1))$$

y que, por ser una función de agregación, M es no decreciente.

Consideramos ahora la relación entre α-B-migratividad y la existencia de un elemento neutro. En este sentido, un primer resultado es el siguiente.

Proposición 2. Sea B una función de agregación con elemento neutro e_B. Entonces, cualquier función de agregación M es e_B-B-migrativa.

Demostración. Tenemos que, por ser e_B elemento neutro de B,

$$M(x,y) = M(B(x, e_B), y) \text{ para todo } x, y \in [0,1] \,; \tag{4}$$

y también

$$M(x,y) = M(x, B(e_B, y)) \text{ para todo } x, y \in [0,1] \,. \tag{5}$$

El resultado se sigue de (4) y (5).

En cuanto a la existencia de elemento neutro para M también podemos presentar algunos resultados. En primer lugar, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3. Sea M una función de agregación α-B-migrativa. Supongamos que M tiene un elemento neutro e_M. Entonces

$$B(0,\alpha) \le M(0,1) \le B(\alpha,1) \tag{6}$$

Demostración. Por la Proposición 1 y la existencia de elemento neutro, tenemos que

$$B(\alpha,1) = M(e_M, B(\alpha,1)) \geq M(0, B(\alpha,1)) = M(0,1)$$

y

$$M(0,1) = M(B(0,\alpha),1) \geq B(0,\alpha) \ ,$$

lo que prueba el resultado.

Esta desigualdad puede precisarse algo más, como sigue.

Proposición 4. Sea M una función de agregación α-B-migrativa. Supongamos que M tiene un elemento neutro e_M. Entonces

(i) Si $e_M \leq B(0,\alpha)$ entonces $B(\alpha,1) = M(0,1) = 1$;

(ii) Si $e_M \geq B(\alpha,1)$, entonces $B(0,\alpha) = M(0,1) = 0$

Demostración. Supongamos que $e_M \leq B(0,\alpha)$. Por la Proposición 1, M es constante sobre $[0, B(0,\alpha)] \times [B(\alpha,1),1]$. En particular, es constante sobre $\{e_M\} \times [B(\alpha,1),1]$. Por ser e_M elemento neutro de M, esto solo es posible si $B(\alpha,1) = 1$. Además, de nuevo por la Proposición 1, $M(0,1) = M(e_M,1) = 1$, con lo que queda demostrado (i).

(ii) se puede probar de forma análoga.

Terminamos esta sección con dos resultados importantes, especialmente de cara a futuros desarrollos. Antes de presentarlos recordamos la definición de función de agregación dual de una dada.

Definición 4. Sea $M : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ una función de agregación. El dual de M es la función de agregación $M^d : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ definida por:

$$M^d(x,y) = 1 - M(1-x, 1-y) \qquad (7)$$

para todos los puntos $x, y \in [0,1]$. En cierto sentido, la dualidad preserva la α-B-migratividad, como queda establecido en el siguiente teorema.

Teorema 2. Sea M una función de agregación α-B-migrativa. Entonces M^d es una función de agregación $(1-\alpha)$-B^d-migrativa.

Demostración. En primer lugar, observamos que

$$M^d(B^d(x, 1-\alpha), y) = 1 - M(1 - B^d(x, 1-\alpha), 1-y) \ ,$$

lo que por definición es igual a

$$1 - M(B(1-x,\alpha), 1-y) \ . \qquad (8)$$

Por otra parte, también se verifica la identidad

$$M^d(x, B^d(1-\alpha, y)) = 1 - M(1-x, 1 - B^d(1-\alpha, y))$$

que una vez más por definición es igual a

$$1 - M(1-x, B(\alpha, 1-y)) \ . \qquad (9)$$

Finalmente, de la propiedad α-B-migrativa se sigue que las expresiones (8) y (9) son iguales.

Corolario 1. Una función de agregación M es α-B-migrativa si y solamente si su función de agregación dual M^d es $(1-\alpha)$-B-migrativa.

Demostración. Es suficiente observar que, para cualquier función de agregación M, se verifica que

$$(M^d)^d(x,y) = M(x,y)$$

para cualesquiera $x, y \in [0,1]$.

Consideramos ahora un automorfismo (una biyección monótona creciente o decreciente, ver [4]) $\varphi : [0,1] \to [0,1]$. Dada una función de agregación M, denotemos mediante M_φ la función de agregación definida por

$$M_\varphi(x,y) = \varphi^{-1}(M(\varphi(x), \varphi(y))) \ , \qquad (10)$$

para cualesquiera $x, y \in [0,1]$.

Esta construcción posibilita el siguiente resultado.

Teorema 3. Sea φ un automorfismo sobre el intervalo unidad $[0,1]$. Entonces, para cualquier par de funciones de agregación M y B, M es α-B-migrativa si y solamente si M_φ es $\varphi^{-1}(\alpha)$-B_φ-migrativa.

Demostración. Supongamos en primer lugar que M es α-B-migrativa. Entonces, tenemos que

$$M_\varphi(B_\varphi(x, \varphi^{-1}(\alpha)), y) = M_\varphi(\varphi^{-1}(B(\varphi(x),\alpha)), y)$$

que a su vez puede reescribirse en la forma

$$\varphi^{-1}(M(B(\varphi(x),\alpha), \varphi(y)) \ .$$

Esta ultima expresión, debido a la α-B-migratividad, es igual a

$$\varphi^{-1}(M(\varphi(x), B(\alpha, \varphi(y)))) = M_\varphi(x, \varphi^{-1}B(\alpha, \varphi(y)))$$

que a su vez puede reescribirse como

$$M_\varphi(x, B_\varphi(\varphi^{-1}(\alpha), y))$$

de forma que obtenemos la $\varphi^{-1}(\alpha)$-B_φ-migratividad. Para obtener el recíproco, basta observar que para cualquier función de agregación M, $M = (M_\varphi)_{\varphi^{-1}}$. Si φ es una biyección monótona, también los es, φ^{-1}, de modo que el resultado queda probado.

4 ALGUNOS RESULTADOS SOBRE FUNCIONES B-MIGRATIVAS

Comenzamos esta sección con un resultado análogo a la Proposición 1.

Proposición 5. Sea M una función de agregación B-migrativa. Entonces, M es constante sobre $[0, B(0,1)] \times [B(0,1), 1]$.

Demostración.

Tenemos que

$$M(0,1) = M(B(0,0),1) = M(0, B(0,1))$$

y también que

$$M(0,1) = M(0, B(1,1)) = M(B(0,1),1) \ .$$

Por tanto, M es constante sobre $\{0\} \times [B(0,1), 1]$ y sobre $[0, B(0,1)] \times \{1\}$, de donde se sigue el resultado.

Cabe destacar que de hecho es suficiente con requerir 0-B-migratividad y 1-B-migratividad a la función M para obtener el resultado.

La B-migratividad impone severas restricciones sobre las funciones de agregación consideradas. Por ejemplo

Proposición 6. Sea M una función de agregación B-migrativa. Supongamos que M posee un elemento neutro e_M. Entonces:

(i) Si $e_M \leq B(0,1)$, se tiene que $M(0,1) = 1$;

(ii) if $e_M \geq B(0,1)$, se tiene que $M(0,1) = 0$.

En particular, $M(0,1)$ debe ser necesariamente igual a 0 o 1, y e_M debe ser diferente de $B(0,1)$.

Demostración. Para demostrar (i) basta observar que

$$M(0,1) = M(0, B(1,1)) = M(B(0,1),1) \geq M(e_M, 1)$$

y este último término es igual a 1 por ser e_M el elemento neutro de M. El apartado (ii) se demuestra de una manera análoga. La obervación final es obvia a partir del resultado.

Además, es posible obtener resultados análogos a los de la Sección 3. Por ejemplo.

Teorema 4. Un función de agregación M es B-migrativa si y solamente si su función de agregación dual M^d es B^d-migrativa.

Teorema 5. Sea φ un automorfismo sobre el intervalo unidad $[0,1]$. Entonces, para cualquier par de funciones de agregación M y B, M es B-migrativa si y solamente si M_φ es B_φ migrativa.

Ambos resultados se siguen fácilmente de los Teoremas 2 y 3 y el Corolario 1 en la sección anterior.

5 ALGUNOS CASOS PARTICULARES

A continuación presentamos un breve estudio de la relación de los conceptos de α-B-migratividad y B-migratividad con algunas de las funciones más utilizadas en el marco de la teoría difusa, como pueden ser las t-normas

Teorema 6. Sea T una t-norma B-migrativa. Entonces se tiene que

$$T(x,y) = B(x,y)$$

para cualesquiera $x, y \in [0,1]$.

Demostración. En primer lugar, tenemos la cadena de identidades

$$x = T(x,1) = T(1,x) = T(1, B(1,x)) = B(1,x) \ .$$

De una forma similar, llegamos a que

$$B(1,x) = B(x,1) = x$$

Por tanto, para cualesquiera $x, y \in [0,1]$, se tiene que

$$B(x,y) = T(B(x,y),1) = T(x, B(y,1)) = T(x,y)$$

que es lo que queríamos demostrar

Por otra parte, también tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7. Sea M una función de agregación T-migrativa, donde T es una t-norma. Entonces, se verifica la identidad

$$M(x,y) = M(1, T(x,y))$$

para cualesquiera $x, y \in [0,1]$.

Demostración. Tenemos la identidad

$$M(x,y) = M(T(1,x), y) = M(1, T(x,y))$$

tal como queríamos probar .

Cabe destacar que todos estos resultados pueden extenderse al caso de t-conormas por la dualidad.

Por último, presentamos una propiedad de las medias cuasiaritmésticas que son α-B-migrativas.. Dichas medias son simplemente funciones de agregación M de la forma

$$M(x,y) = h^{-1}(ph(x) + qh(y))$$

donde $h : [0,1] \to D \subset [-\infty, \infty]$ es una biyección estrictamente decreciente y $p, q \in [0,1]$ son tales que se verifica $p + q = 1$.

Nuestro resultado es el siguiente.

Proposición 7. Sea M una media cuasiaritmética α-B-migrativa. Entonces se tiene que α es el elemento neutro de B si y solamente si existe $x_0 \in [0,1]$ de modo que

$$B(x_0, \alpha) = x_0 \ .$$

Demostración. Si α es el elemento neutro de B, el resultado es obvio. Para ver el recíproco, sea $x_0 \in [0,1]$ tal que

$$B(x_0, \alpha) = x_0 \ .$$

A partir de la α-B-migrativity, y para todo $y \in [0,1]$, tenemos que

$$M(B(x_0, \alpha), y) = M(x_0, B(\alpha, y)) \ .$$

Si reescribimos esta expresión en términos de h, vemos que

$$0 = ph(B(x_0, \alpha)) - p(h(x_0)) = qh((B(\alpha, y)) - qh(y)$$

de modo que $y = B(\alpha, y)$ para todo $y \in [0,1]$ y la demostración queda completa.

6 CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado los conceptos de α-B-migratividad y B-migratividad, como generalización de las ideas de α-migratividad y migratividad, respectivamente. Hemos relacionado estos conceptos con algunas propiedades que suelen resultar de interés al considerar funciones de agregación, como por ejemplo la existencia de elemento neutro.

Los contenidos de este trabajo constituyen un primer paso en el análisis más exhaustivo de estas ideas. En particular, es importante desarrollar un marco teórico que permita comprender mejor el concepto de migratividad y su relación, por ejemplo, con la asociatividad. También sería interesante obtener una caracterización lo más completa posible de las funciones de agregación α-B-migrativas y B-migrativas. Por último, pretendemos estudiar la posible aplicación de nuestras construcciones en campos como la toma de decisiones o el tratamiento de imágenes.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por los proyectos: TIN2007-65981, TIN2009-07901 and APVV-0012-07.

Referencias

[1] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, Aggregation Functions: A Guide for Practitioners, Springer, Berlin, 2007.

[2] G. Beliakov, T. Calvo, On migrative means and copulas, *Proc. Fifth International School on Aggregation Operators, Palma de Mallorca, 2009*, Pág 107–110.

[3] H. Bustince, J. Montero, R. Mesiar, Migrativity of aggregation functions.*Fuzzy Sets and Systems*, 160, Pág 766–777, 2009

[4] H. Bustince, P. Burillo, F. Soria, Automorphisms, negations and implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 134, Pág 209-229, 2003.

[5] F. Durante, P. Sarkoci, A note on the convex combinations of triangular norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 159, Pág 77-80, 2008.

[6] J. Fodor, I. J. Rudas, On continuous triangular norms that are migrative. *Fuzzy Sets and Systems*, 158, Pág 1692-1697, 2007.

[7] J. Montero, V. López, D. Gómez, The role of fuzziness in decision making. D.Ruan et al. *Fuzzy Logic:A Spectrum of Applied and Theoretical Issues,Springer*, Pág 337–349, 2007.

[8] J. Montero, D. Gómez, S. Muoz, Fuzzy information representation for decision aiding. *Proc. of the IPMU Conference, Málaga, Spain, June 22-27*, 2008.

[9] B. Roy, Decision sciences or decision aid sciences. *European Journal of Operational Research* , 66, Pág 184-203, 1993